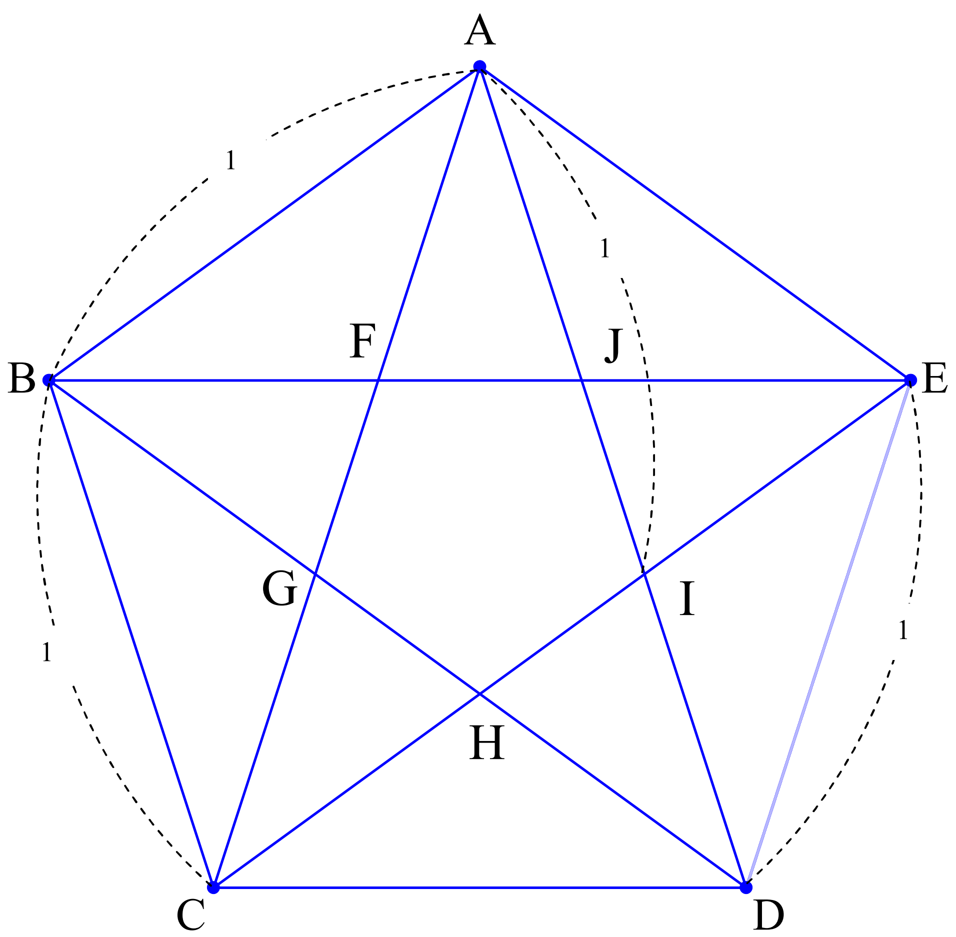
$\boxed{1}$

(1)

$\boxed{ア}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　$\boxed{イ}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

解説



△IAC∽△IDE より，AC：DE＝IA：ID

これと条件より DE＝1

また，AB//CI かつ BC//AI かつ AB=BC より，四角形 ABCI はひし形だから，

IA＝BC＝1

よって，

AC：1＝1：ID　・・・①

AC＝AD だから，

IA＋ID＝AC

ID＝AC－IA＝AC－1　・・・②

①，②より，

AC ：1＝1：AC－1

$\mathrm{AC}(\mathrm{AC}-1)=1$

$\mathrm{AC}^2-\mathrm{AC}-1=0$

$\therefore \mathrm{AC}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　・・・$\boxed{\text{ア}}$

四角形 AGDE はひし形だから，AG＝1

これと，△FAB と△GBC が合同な二等辺三角形であることより，

AF＝GC＝AC－AG＝$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって，

$\mathrm{FG}=\mathrm{AC}-(\mathrm{AF}+\mathrm{GC})=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-2\times\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　・・・$\boxed{\text{イ}}$

補足

△ABG∽△BGF や△BCA∽△FAB の相似比から求めることもできる。

(2)

$\boxed{ウ}\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　$\boxed{エ}\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

解説

△ABE と△CDB は合同な二等辺三角形だから，

∠ABE＝∠CBD　・・・③

BE//CD より，

∠EBD＝∠CDB，これと∠BDC＝∠CBD より，

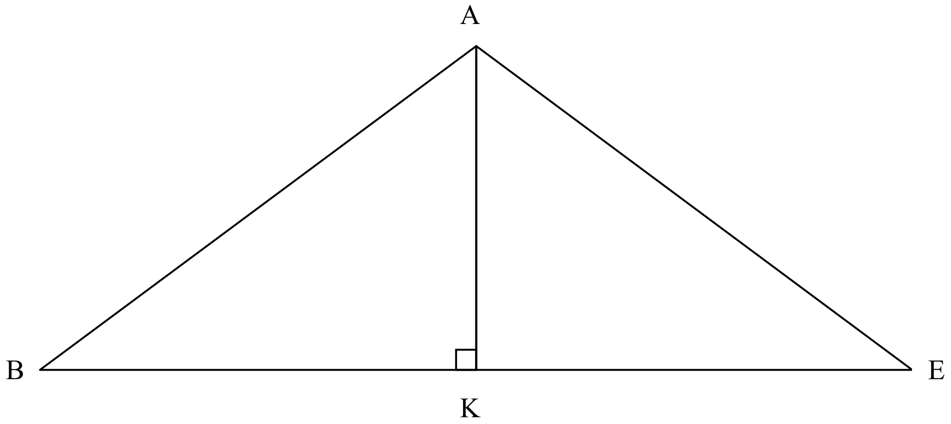
∠EBD＝∠CBD　・・・④

③，④より，

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{CBD}=\frac{\angle\mathrm{ABC}}{3}$$

$$\angle\mathrm{ABC}=\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$$

よって，∠ABE＝36°



△ABE は AB＝AE の二等辺三角形である。

よって，A から BE に下ろした垂線の足を K とすると，

二等辺三角形の性質より，

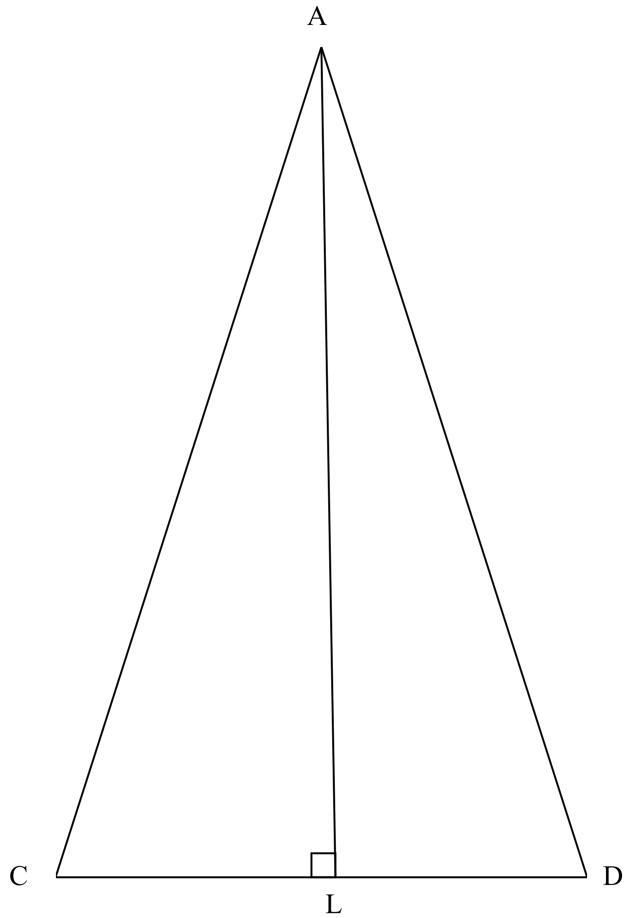
$$\mathrm{BK}=\frac{\mathrm{BE}}{2}=\frac{\mathrm{AC}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\quad ・・・⑤$$

また，

$$\mathrm{BK}=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{ABE}=1\cdot\cos 36^\circ=\cos 36^\circ\quad ・・・⑥$$

⑤，⑥より，

$$\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\quad ・・・\boxed{ウ}$$



△ACD は∠ACD＝∠ADC＝72° の二等辺三角形だから，
A から CD におろした垂線の足を L とすると，
二等辺三角形の性質より，

$$\mathrm{CL}=\frac{\mathrm{CD}}{2}=\frac{1}{2} \quad ・・・⑦$$

また，$\mathrm{CL}=\mathrm{AC}\cos 72^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cos 72^\circ \quad ・・・⑧$

⑦，⑧より，

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cos 72^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos 72^\circ=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad ・・・\boxed{エ}$$

別解

$$\cos 72^\circ=\cos(2\times 36^\circ)=-1+2\cos^2 36^\circ=-1+\frac{3+\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

補足

n 角形の内角の和＝$180°\times(n-2)$

n 角形の内部に 1 点 O をとると，n 角形の頂点と O を頂点とする三角形が n 個できる。

よって，

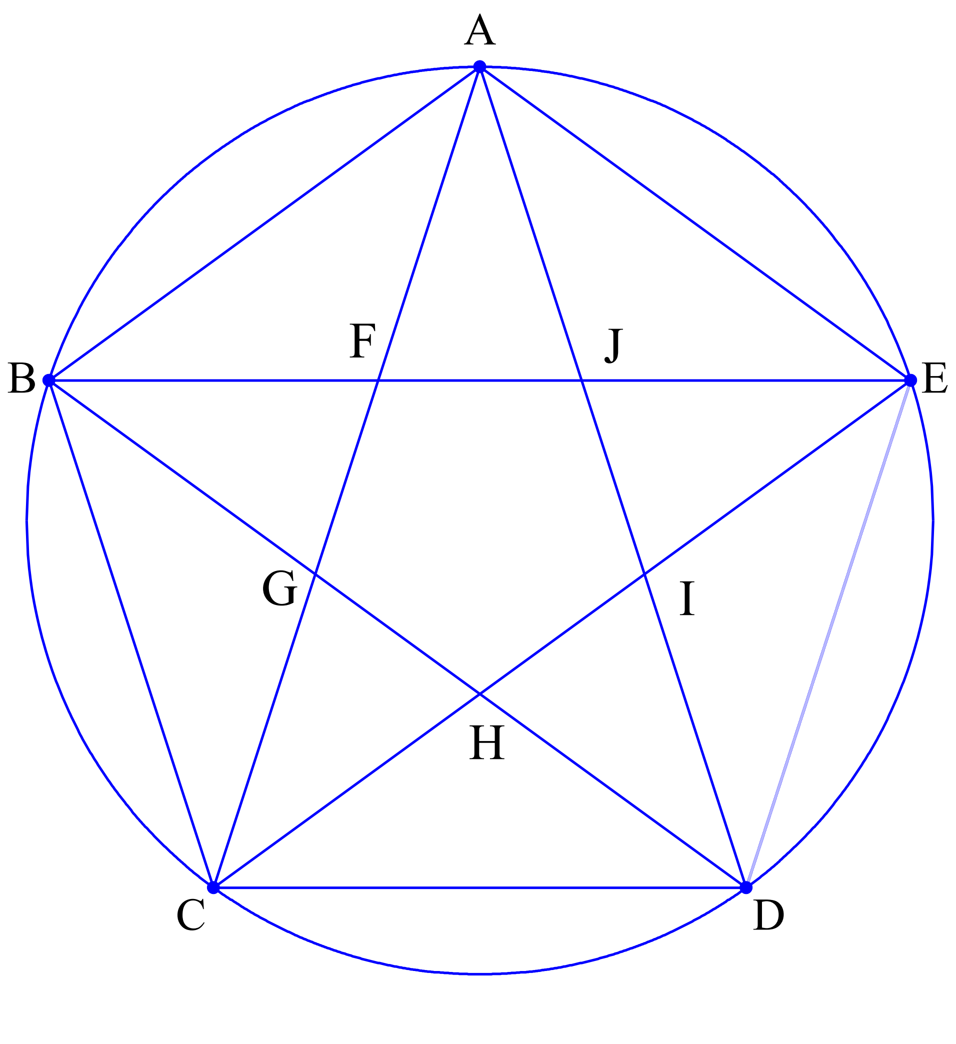
これら三角形の内角の和 $180n$ から頂点 O の角度の和 360°を引けば n 角形の内角の和となる。

$180n-360=180(n-2)$

(3)

$\boxed{\text{オ}}\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\pi$　$\boxed{\text{カ}}\ \dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}\pi$

解説



正五角形 ABCDE に外接する円の半径を R，面積を S とすると，
△ABE について正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AE}}{\sin\angle\mathrm{ABE}}=2R$$

$$\frac{1}{\sin 36^\circ}=2R$$

$$R=\frac{1}{2\sin 36^\circ}$$

$$S=\pi R^2=\frac{\pi}{4\sin^2 36^\circ}=\frac{\pi}{4\left(1-\cos^2 36^\circ\right)}=\frac{\pi}{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\pi}{5-\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\pi \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{\text{オ}}$$

正五角形 FGHIJ に外接する円の面積を s とすると，

正五角形 ABCDE と正五角形 FGHIJ の相似比＝AB：FG＝1：$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ より，

外接円の半径の比も 1：$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

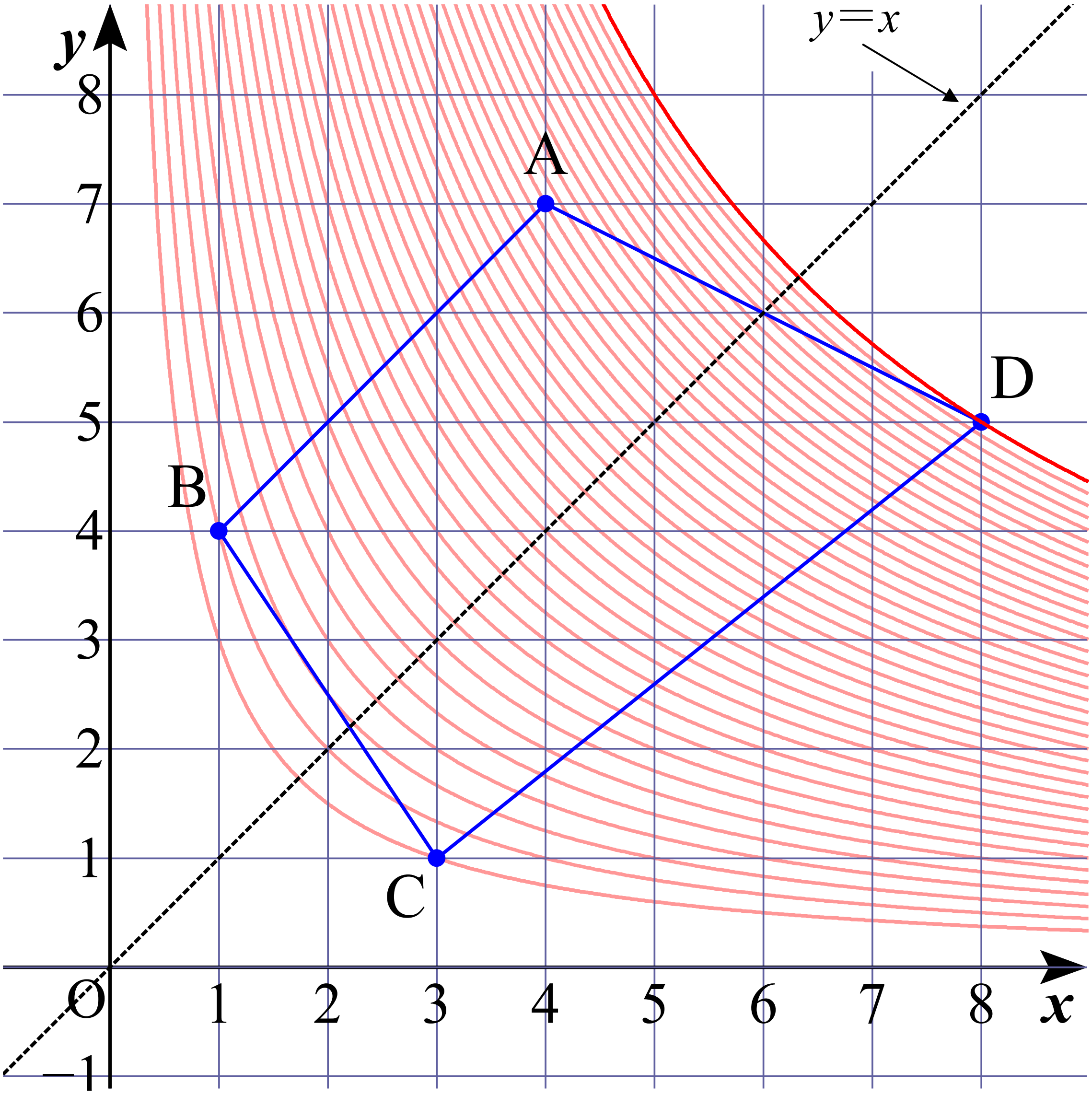
よって，

$$S : s = 1^2 : \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\therefore s=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 S=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\times\frac{5+\sqrt{5}}{10}\pi=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\pi \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{\text{カ}}$$

$\boxed{2}$

(1)



四角形 ABCD の周を含む内部領域を動く点 $\mathrm{P}(x, y)$ が $xy = m$ を満たすとき，

$x > 0$ より，点 P は双曲線 $y = \dfrac{m}{x}$ の $x > 0$ 上の点である。

図より，

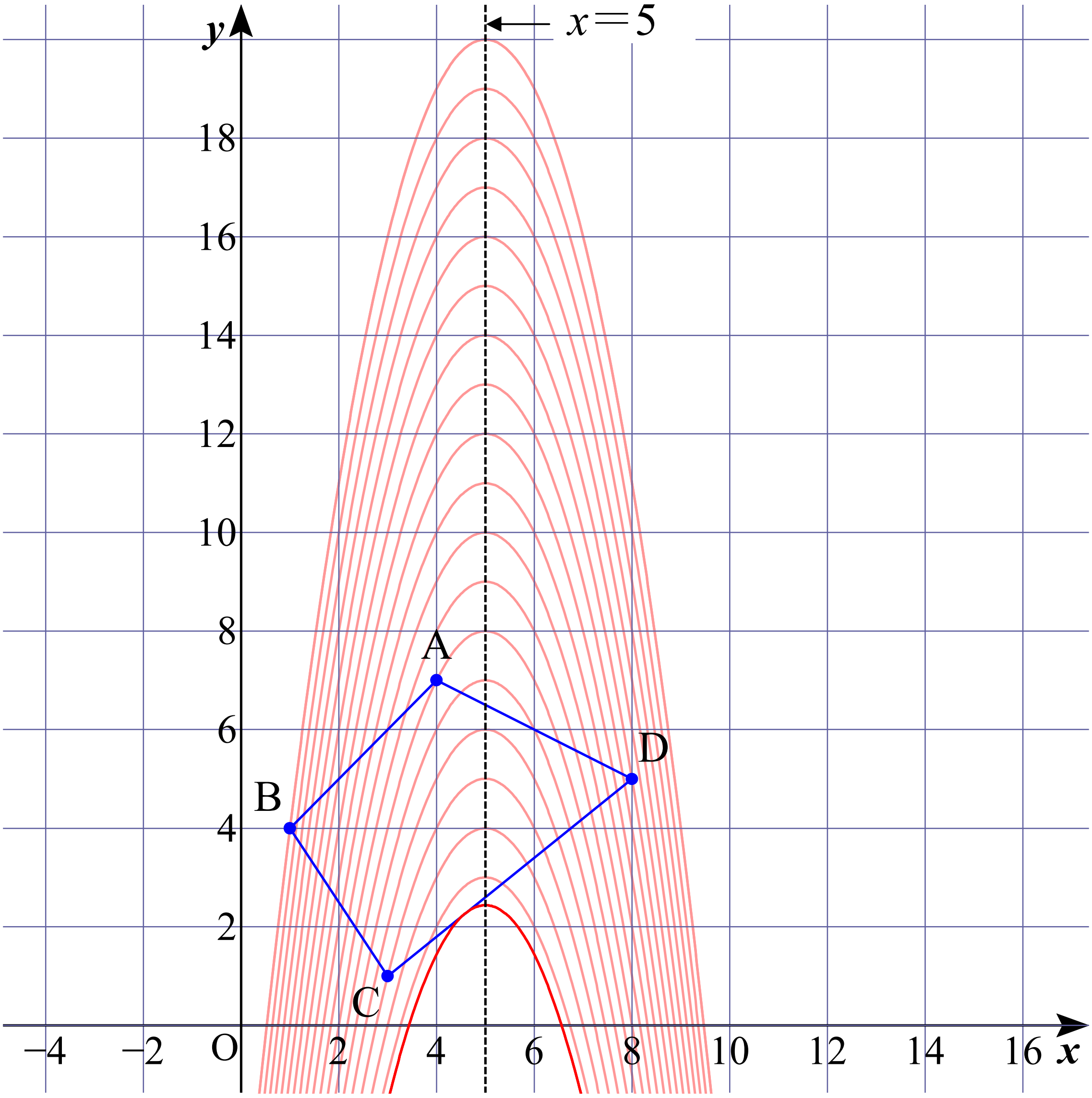
m が最小となるのは，$y = \dfrac{m}{x}$ が点 $\mathrm{C}(3,1)$ と通るときであり，

m が最大となるのは，$y = \dfrac{m}{x}$ が点 $\mathrm{D}(8,5)$ と通るときである。

よって，

m の最小値は $1 \times 3 = 3$，最大値は $8 \times 5 = 40$ ・・・(答)

(2)



$n=y+x^2-10x$ は,

$y=-x^2+10x+n=-(x-5)^2+n+25$ より,

軸 $x=5$, 頂点 $(5, n+25)$ とする 2 次関数を表す。

図より,

n が最大となるのは,

$y=-x^2+10x+n$ が点 $B(1,4)$ を通るときで,

このとき, $n=4+1^2-10\times 1=-5$

n が最小となるのは,

$y=-x^2+10x+n$ が辺 CD に接するときで,

辺 CD の式は，$y=\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}\ (3\le x\le 8)$だから，

これは，

$y=-x^2+10x+n$ と $y=\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}\ (3\le x\le 8)$の連立方程式が重解をもつときである。

$-x^2+10x+n=\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}$ より，$5x^2-46x-5n-7=0$

$y=-x^2+10x+n$ と $y=\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}\ (3\le x\le 8)$は

判別式を D とすると，
重解条件より，

$\frac{D}{4}=23^2-5(-5n-7)=25n+564=0$

$\therefore n=-\frac{564}{25}$

また，このときの重解を α とすると，解と係数の関係より，

$\alpha+\alpha=-\frac{-46}{5}=\frac{46}{5}$

$\therefore \alpha=\frac{23}{5}$

$3\le\alpha\le 8$ だから，
接点は辺 CD 上にある。
以上より，

n の最大値は-5，最小値は$-\frac{564}{25}$　・・・（答）

$\boxed{3}$

(1)

$\log_x y \log_y z \log_z x = \dfrac{\log y}{\log x} \cdot \dfrac{\log z}{\log y} \cdot \dfrac{\log x}{\log z} = 1$

(2)

$(\log_x y)^2 - \dfrac{3}{\log_y x} + 2 < 0$

$(\log_x y)^2 - 3\log_x y + 2 < 0$

$(\log_x y - 1)(\log_x y - 2) < 0$

$1 < \log_x y < 2$

$\log_x x < \log_x y < \log_x x^2$

よって,

$0 < x < 1$ ならば $x^2 < y < x$， $1 < x$ ならば $x < y < x^2$

図の斜線部（境界は含まない）